14-11-18

Θεώρημα

Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία. Ονομάζουμε A το σύνολο των σ.σ. της $\{a_n\}$. Τότε το A είναι κλειστό

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι A κλειστό αν $\forall \{\beta_n\} \subseteq A$ τω. η $\{\beta_n\}$ να συγκλίνει, ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n \in A$

Έστω $\{\beta_n\} \subseteq A$, τω. $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$. Θδο $\beta \in A$.

Για $\varepsilon=1$, $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}$, τω $|a_{k_1} - \beta_1| < 1$ . . . . . .

Το θ_1 είναι όριο κάποιας υπακολουθίας της $\{a_n\}$ $\Rightarrow$
$\exists\, k_1 \in \mathbb{N},\ |a_{k_1} - \theta_1| < 1$

Για $\varepsilon = 1/2$, $\exists\, k_2 > k_1$, $|a_{k_2} - \theta_2| < 1/2$
Αν όχι, τότε $\forall\, n > k_1$, $|a_n - \theta_2| \geq 1/2$
(άτοπο γιατί υπάρχει υπακολουθία της $\{a_n\}$ που να συγκλίνει στο θ_2)
Για $\varepsilon = 1/3$, ομοίως, $\exists\, k_3 > k_2$, $|a_{k_3} - \theta_3| < 1/3$
Για $\varepsilon = 1/n$, $\exists\, k_n > k_{n-1}$, τω $|a_{k_n} - \theta_n| < 1/n$
$\Rightarrow$ $\{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ κ' $\underbrace{|a_{k_n} - \theta_n| < 1/n}_{①}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Από ① $\theta_n - 1/n < a_{k_n} < \theta_n + 1/n \xrightarrow[\text{ακολουθίες}]{\text{συγκλίνουσες}} a_{k_n} \to \theta \Rightarrow \theta \in A$.

Έστω ότι η $\{a_n\}$ φραγμένη. Τότε το σύνολο A των σ.σ. της $\{a_n\}$ είναι $\neq \emptyset$, κλειστό και φραγμένο.
Άρα $\exists \min A$ κ' $\exists \max A$.

<u>Ορισμός</u>
$\lim\inf a_n = \min A =$ Ελάχιστο σ.σ. της $\{a_n\}$
$\lim\sup a_n = \max A =$ Μέγιστο σ.σ. της $\{a_n\}$

Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι άνω (κάτω) φραγμένη, ορίζουμε
$\lim\sup a_n = +\infty$ ($\lim\inf a_n = -\infty$)
Αν $a_n \to +\infty \Rightarrow \lim\inf a_n = +\infty$
Αν $a_n \to -\infty \Rightarrow \lim\sup a_n = -\infty$

<u>Παράδειγμα</u>
Έστω $\{a_n\}$ τω $a_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\cancel{\lim a_n \leq 3}$
$\lim\sup a_n \leq 3$

- $\{a_n\}$ συγκλίνει ανν $\lim\sup a_n = \lim\inf a_n \in \mathbb{R}$

• $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

Αν $a_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow A = \{l\} \Rightarrow \min A = \max A = l \Rightarrow$
$\liminf a_n = \limsup a_n = l \in \mathbb{R}$

Αν $\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$: $\{a_n\}$ φραγμένη και αν $\{a_{n_k}\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \liminf a_n \leq \lim a_{k_n} \leq \limsup a_n$
$\Rightarrow \lim a_{k_n} = \limsup a_n = \liminf a_n \Rightarrow a_n \to \liminf a_n = \limsup a_n$.

$\limsup a_n =$ "μέγιστο όριο (υπακολουθίας) της $\{a_n\}$"
$=$ "sup όλων των ορίων της $\{a_n\}$".
$=$ "$\sup \lim a_n$".

<u>Θεώρημα</u> Έστω ότι $\{a_n\}$, φραγμένη

$\limsup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\})$

• $\{a_k : k \geq n\} = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$
• $\{a_k : k \geq n+1\} = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

$\sup\{a_k : k \geq n+1\} \leq \sup\{a_k : k \geq n\}$
$\inf\{a_k : k \geq n+1\} \geq \inf\{a_k : k \geq n\}$

• $\sup\{a_k : k \geq n\}$: φθίνουσα και φραγμένη
• $\inf\{a_k : k \geq n\}$: αύξουσα και φραγμένη

$\liminf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\{a_k : k \geq n\})$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Γνωρίζαμε ότι $\exists \{a_{k_n}\}$ τω $a_{k_n} \to \sup\{a_k : k \geq n\}$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\{a_k : k \geq n\}$ είναι σ.σ. της $\{a_n\}$.
$\Rightarrow \sup\{a_k : k \geq n\} \leq \limsup a_n$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}) \leq \limsup a_n$.

$\exists$ υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$ τ.ω. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \limsup a_n$

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$: $\{a_{k_n+\nu}\}$ υπακολουθία της $\{a_{n+\nu}\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n+\nu}$ είναι σ.σ. $\{a_{n+\nu}\}$. Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n+\nu} \leq \sup\{a_n : n \geq \nu\}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n+\nu} \leq \lim_{\nu\to\infty} \sup\{a_n : n \geq \nu\}$$

$$= \lim a_{k_n}$$

$$= \limsup a_n.$$

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα sup, inf, lim sup, lim inf της ακολουθίας $a_1 = 2,\ a_2 = -2,\ a_n = (-1)^n,\ n \geq 3$

$\sup\{a_n\} = 2$, $\inf\{a_n\} = -2$

$$\sup\{a_k : k \geq n\} = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 1, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n : n \geq k\} = 1$$

$$\inf\{a_k : k \geq n\} = \begin{cases} -2, & n = 1 \\ -1, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \liminf a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k : k \geq n\}) = -1.$$

Πρόταση

$\{a_n\}$, $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

($\Rightarrow$ Αν $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$ συγκλίνει τότε η $\sqrt[n]{|a_n|}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο)

Απόδειξη

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_2|}{|a_1|}}\cdot\sqrt[n]{|a_1|} \quad *$$

Αν $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, τέλος

Αν $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in \mathbb{R}$

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sup\left\{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| : k \geq n\right\}$$

Αν $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0$, τω. $\forall\, n \geq n_0$, $l-\varepsilon < \sup\left\{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| : k\geq n\right\}$

$< l+\varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq n_0,\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < l+\varepsilon}$, $\forall n\geq n_0$, $\sqrt[n]{\gamma} < 1+\varepsilon$

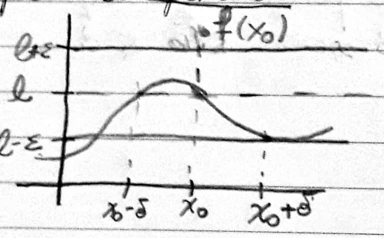
$$* = \sqrt[n]{\underbrace{\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}}_{< l+\varepsilon}\cdots\underbrace{\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}}_{< l+\varepsilon}}\cdot\sqrt[n]{\underbrace{\frac{|a_{n_0}|}{|a_{n_0-1}|}\cdots\frac{|a_2|}{|a_1|}|a_1|}_{\gamma}} <$$

$(l+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}}(1+\varepsilon) < (l+\varepsilon)(1+\varepsilon)$, $\forall\, \varepsilon>0$

$\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < (l+\varepsilon)(1+\varepsilon)$, $\forall\, \varepsilon>0$

$\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq l$

Όριο συνάρτησης



Έστω $x_0 \in (\Delta(f))'$. Λέμε ότι η $f(x)$ συγκλίνει στο l όταν $x\to x_0$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αν $\forall\,\varepsilon>0$,

$\exists\, \delta>0$ τω. $\forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$

↳ Δ δακτυλική περιοχή του x_0 $N_\delta(x_0)$

και $x \in D(f)$, να ισχύει $|f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ανν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, τω $\forall x \in N_\delta^*(x_0) \cap D(f)$

να ισχύει $|f(x)-\ell| < \varepsilon$

<u>Ασκήσεις</u>

- Με τον ορισμό νδο. $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$

Έστω $\varepsilon > 0$

$$|\sqrt{x+1}-2| = \left| \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)} \right| = \left| \frac{x+1-4}{\sqrt{x+1}+2} \right| = \frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2} \leq \frac{|x-3|}{2}$$

Θέλω, $\forall x \in (3-\delta, 3+\delta) \setminus \{3\}$ να έχω $|\sqrt{x+1}-2| < \varepsilon$

$3-\delta < x < 3+\delta$, $x \neq 3 \iff$

$-\delta < |x-3| < \delta$, $x \neq 3 \iff$

$0 < |x-3| < \delta$

Μπορώ να πάρω δ οτιδήποτε μικρότερο του 2ε

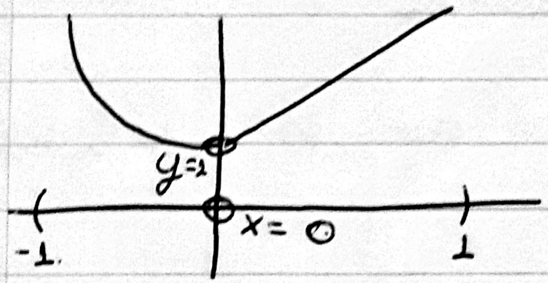
Άρα $|\sqrt{x+1}-2| < \dfrac{|x-3|}{2} < \varepsilon$, $\forall x$ με $0 < |x-3| < \delta$.

Αν βρω ένα $\delta_0 > 0$ τω $\forall x \in D(f)$ τω $0 < |x-\ell| < \delta_0$ να ισχύει $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ τότε μπορώ να πάρω ως δ οτιδήποτε $< \delta_0$

• Με τον ορισμό νδο $\lim_{x \to 0} f(x)$ υπάρχει αν

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

$\Delta(f) = (-1,0) \cup (0,1)$



Θδο $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Για $x<0$ $\quad |f(x)-1| = |x^2| = x^2$

Για $x>0$ $\quad |f(x)-1| = |x| = x$

Έστω $\varepsilon > 0$

Ψάχνω $\delta > 0$ τω. $\forall x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$

να ισχύει $|f(x)-1| < \varepsilon$

$x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$

$-\delta < x < \delta$

$\Rightarrow x^2 < \delta^2$

Παίρνω $\delta = \min\{\varepsilon, \varepsilon^2\}$

$\Rightarrow$ Για $x<0$, $|f(x)-1| = x^2 < \delta^2 \leq (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$

Για $x>0$, $|f(x)-1| = x < \delta \leq \varepsilon$